Topology Vol. 22, No. 2, pp. 165–167, 1983
Printed in Great Britain.
0040–9383/83/020165–03$03.00/0
Pergamon Press Ltd.

EXISTENCE DE SYSTÈMES DYNAMIQUES MINIMAUX SUR L'ESPACE DE HILBERT SÉPARABLE

A. FATHI

(*Received* 4 *February* 1981)

NOUS DÉMONTRONS le théorème suivant:

THEOREME. *Tout groupe localement compact, non compact, métrisable et séparable admet une action continue minimale sur l'espace de Hilbert séparable.*

Rappelons que, par définition, un groupe agit minimalement si chaque orbite de l'action est dense.

§1

Puisque tous les espaces de Fréchet séparables de dimension infinie sont homéomorphes (cf. [1] Théorème 5.2, p. 189), il suffit de réaliser une telle action sur un Fréchet bien choisi.

Considérons un groupe G localement compact, non compact, métrisable et séparable. Il est bien connu que $C^0(G)$, l'espace des fonctions continues à valeurs réelles, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact est un espace de Fréchet séparable et de dimension infinie. Le groupe G agit continument sur $C^0(G)$ par $g.f(x) = f(g^{-1}x)$, où $f \in C^0(G)$, $g \in G$ et $x \in G$. Comme G est non compact, si $f \in C^0(G)$ est une fonction à support compact, on a: $\lim_{g\to\infty} g.f = 0$. De plus, le sous-espace des fonctions à support compact est dense dans $C^0(G)$.

Nous résumons la situation dans la proposition suivante:

PROPOSITION 1. *Si G est un groupe localement compact, non compact, métrisable et séparable, il existe un espace de Fréchet séparable F, de dimension infinie, et une action continue de G sur F, $(g, x) \mapsto g.x$, vérifiant les propriétés (P) suivantes*:

$$(P)\begin{cases} \text{i) } \textit{Pour tout } g \in G, \textit{ l'application } x \to g.x \textit{ est un automorphisme linéaire et continu de } F; \\ \text{ii) } \textit{Le sous-espace vectoriel } \{x \mid \lim_{g\to\infty} g.x = 0\} \textit{ est dense dans } F. \end{cases}$$

§2.

Nous allons démontrer la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Supposons que l'on a une action d'un groupe localement compact G sur un espace de Fréchet séparable F, de dimension infinie, $(g, x) \mapsto g.x$, vérifiant les propriétés (P). Alors l'ensemble $D = \{x \mid l'orbite\ de\ x\ par\ G\ est\ dense\ dans\ F\}$ est un sous-ensemble de F homéomorphe à F.*

Il est clair que les propositions 1 et 2 impliquent le théorème puisque D est G-invariant et l'action de G sur D est minimale.

Pour démontrer la Proposition 2, nous avons besoin de quelques outils de la topologie de dimension infinie que nous rappelons ici.

DEFINITION (Z-ensemble). Soit F un espace de Fréchet et $A \subset F$, un sous-ensemble fermé de F. On dit que A est un Z-ensemble (dans F), si pour tout compact K, l'ensemble $C^0(K, F - A)$ est dense dans $C^0(K, F)$ pour la topologie de la convergence uniforme.

L'outil principal utilisé est le théorème suivant (cf. [1], Théorème 5.2, p. 189 et Théorème 6.4, p. 166).

PROPOSITION 3. *Si F est un espace de Fréchet séparable de dimension infinie et $H \subset F$ est réunion dénombrable de Z-ensembles, $F - H$ est homéomorphe à F.*

Nous passons à la démonstration de la Proposition 2. Si $(\mathcal{O}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base (dénombrable) d'ouverts non vides de F, on peut vérifier que $D = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (\bigcup_{g \in G} g \,.\, \mathcal{O}_i)$. On voit donc, à l'aide de la Proposition 3, qu'il suffit de démontrer le lemme suivant:

LEMME 4. *Dans la situation de la proposition 2, si $\mathcal{O}$ est un ouvert non vide de F, l'ensemble $F - \bigcup_{g \in G} g \,.\, \mathcal{O}$ est un Z-ensemble.*

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que si $f : K \to F$ est continue, où K est compact et $\mathfrak{v}$ est un voisinage de 0 dans F, alors il existe f: $K \to \bigcup_{g \in G} g \,.\, \mathcal{O}$ où f' est $\mathfrak{v}$-proche de f, i.e. $(f - f')(K) \subset \mathfrak{v}$. Choisissons alors un voisinage $\mathfrak{w}$ de 0 dans F, tel que $\mathfrak{w} + \mathfrak{w} \subset \mathfrak{v}$. Notons E le sous-espace vectoriel $\{x \in F \mid \lim_{g \to \infty} g \,.\, x = 0\}$. Puisque E est dense, on peut trouver $(\varphi_i)_{1 \le i \le n}$ une partition de l'unité suffisamment fine sur K et une suite finie $(e_i)_{1 \le i \le n}$ d'éléments de E, tels que $\bar{f}$: $K \to E$ définie par $\bar{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \varphi_i(x)$ soit $\mathfrak{w}$-proche de f. De plus, comme l'image de $\bar{f}$ est dans un sous-espace de dimension finie de E, on vérifie que $g \circ \bar{f} \to 0$ uniformément quand $g \to \infty$. En utilisant encore la densité de E dans F, on peut trouver $a \in E \cap \mathcal{O}$. Soit $\mathfrak{u}$ un voisinage de 0 dans F, tel que $a + \mathfrak{u} \subset \mathcal{O}$. Puisque $\lim_{g \to \infty} .\, \text{unif.}\, g \circ \bar{f} = 0$ et $\lim_{g \to \infty} g \,.\, a = 0$, on peut trouver, par la non-compacité G, un élément $g \in G$, tel que $g \circ \bar{f}(K) \subset \mathfrak{u}$ et $g^{-1} \,.\, a \in \mathfrak{w}$. Définissons alors f': $K \to F$ par $f' = g^{-1} \,.\, a + \bar{f}$. Par construction, f' est $\mathfrak{w}$-proche de $\bar{f}$, et par conséquent $\mathfrak{v}$-proche de f; de plus $g \circ f'(K) = a + g \circ \bar{f}(K) \subset a + \mathfrak{v} \subset \mathcal{O}$, ou encore $f'(K) \subset g^{-1} \,.\, \mathcal{O} \subset \bigcup_{g \in G} g \,.\, \mathcal{O}$. ■

§3.

COMPLÉMENT AU THÉORÈME. *On peut s'arranger pour que l'action soit aussi libre.*

Démonstration. Soit F le Fréchet fourni par la Proposition 1. Le groupe G agit aussi sur le Fréchet séparable de dimension infinie $\tilde{F} = F^{\mathbb{N}}$, par $g \,.\, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (g \,.\, x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On vérifie facilement que cette action possède aussi les propriétés (P). Par conséquent, $\tilde{D} = \{X \in \tilde{F} \mid$ l'orbite de X par G est dense dans $\tilde{F}\}$ a un complémentaire dans $\tilde{F}$ qui est réunion dénombrable de Z-ensembles. Considérons:

$$Y = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \tilde{F} \mid \text{la suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est dense dans } F\}.$$

Cet ensemble est clairement G-invariant. De plus, comme J. West l'a montré, $\tilde{F} - Y$

est réunion dénombrable de Z-ensembles, et G agit librement sur Y (cf. [1] démonstration du Théorème 6.5, p. 168). Il est clair que G agit minimalement et librement sur $Y \cap \tilde{D}$; de plus, par la Proposition 3, l'ensemble $Y \cap \tilde{D}$ est homéomorphe à $\tilde{F}$.

§4. REMARQUES

(1) Comme corollaire de la Proposition 2, on obtient qu'une action vérifiant les propriétés (P) a une orbite dense dans F. En 1969, Rolewicz a donné des exemples d'automorphismes et de groupes à un paramètre d'automorphismes d'espaces de Fréchet de dimension infinie ayant une orbite dense. On constate que ces exemples vérifient les propriétés (P).

(2) Dans le cas où $G = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, dans la Proposition 2, on peut remplacer D par $D' = \{x \in F \mid \text{la demi-orbite positive de } x \text{ est dense}\}$.

En effet, si on regarde la démonstration du Lemme 4, on s'aperçoit que l'on a montré aussi que $\bigcup_{g \geq 0} g^{-1}(U)$ a un complémentaire qui est un Z-ensemble. On en déduit qu'il existe un homéomorphisme (resp. un flot) minimal sur l'espace de Hilbert séparable, où toutes les demi-orbites positives sont denses. Ce résultat est à rapprocher du théorème de Gottschalk [3] qui dit qu'il n'existe pas d'action de $\mathbb{Z}$ (resp. de $\mathbb{R}$) sur un espace localement compact non compact où toute demi-orbite positive est dense.

(3) Le problème de l'existence d'un homéomorphisme ou d'un flot minimal sur un espace euclidien de dimension finie est toujours ouvert. Remarquons qu'il est bien connu que s'il existe un champ de vecteurs minimal C^r sur S^n, il existe un champ de vecteurs minimal C^r sur $\mathbb{R}^n$; en effet, si on multiplie le champ de vecteurs sur S^n par une fonction C^∞ qui s'annule en un seul point $x_0 \in S^n$, on obtient un champ de vecteurs minimal sur $\mathbb{R}^n \approx S^n - x_0$. Cette remarque est à rapprocher de la conjecture de Seifert: Est-ce que tout champ de vecteurs C^∞ de S^3 a une orbite périodique? Remarquons aussi qu'il n'existe pas d'homéomorphisme (Resp. flot) minimal sur $\mathbb{R}^2$. Ceci résulte du théorème de translation de Brouwer [2] (resp. du théorème de Poincaré Bendixson).

On sait qu'il existe des homéomorphismes ayant une orbite dense sur toute variété connexe de dimension supérieure ou égale à 2, cf. par exemple [4]. On voit donc, par exemple dans le cas de $\mathbb{R}^2$, que l'existence d'un homéomorphisme minimal n'est pas une conséquence de l'existence d'un homéomorphisme ayant une orbite dense.

(4) Le problème de l'existence d'un difféomorphisme (ou d'un flot lisse) minimal sur l'espace de Hilbert séparable reste aussi en suspens.

RÉFÉRENCES

1. C. Bessaga et A. Pelczynski: *Selected Topics in Infinite Dimensional Topology*. PWN, Warszawa (1975).
2. L. E. J. Brouwer: Beweis des ebenen Translation satzes. *Math. Ann.* **72** (1912), 37–54.
3. W. H. Gottschalk: Orbit-closure decompositions and almost periodic properties. *Bull. Am. Math. Soc.* **50** (1944), 915–919.
4. J. Oxtoby and S. Ulam: Measure preserving homeomorphisms and metrical transitivity. *Ann. Math.* **42** (1941), 874–920.
5. S. Rolewicz: On orbits of elements. *Studia Math.* **32** (1969), 17–22.

Université de Paris-Sud
Orsay, Paris
France